**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η f΄(x) διατηρεί πρόσημο στο , τότε να αποδείξετε ότι το f(x0) δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

**Μονάδες 7**

**Α2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

**Μονάδες 4**

**Α3.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

**Μονάδες 4**

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολοθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Η εξίσωση  ρ>0 παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο Κ(z0) και ακτίνα ρ, όπου z, z0 μιγαδικοί αριθμοί.

(μονάδες 2)

**β)** Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής . Ισχύει η ισοδυναμία



(μονάδες 2)

**γ)** Αν είναι 0<α<1, τότε 

(μονάδες 2)

**δ)** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι κυρτή στο Δ, τότε υποχρεωτικά f΄΄(x)>0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

(μονάδες 2)

**ε)** 

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

(μονάδες 2)

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

* , 
* w φανταστικός

**Β1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα , εκτός από το σημείο του κύκλου.

**Μονάδες 10**

**Β2.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, του ερωτήματος Β1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει 

**Μονάδες 8**

**Β3.** Αν είναι , τότε να αποδείξετε ότι

w4+i w7=0

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση 

**Γ1.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x0=0

**Μονάδες 4**

**Γ2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

**Μονάδες 7**

**Γ3. i)** Να αποδείξετε ότι, για x>0, ισχύει η ισοδυναμία



**ii)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση x4=4x, x>0, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις x1=2 και x2=4

(μονάδες 6)

**Μονάδες 8**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  τέτοιο, ώστε



**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

, 

με σύνολο τιμών f(A)=R, τέτοια, ώστε

, για κάθε 

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 4) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f-1 της f (μονάδες 3)

**Μονάδες 7**

Για τα ερωτήματα **Δ2** και **Δ3**, δίνεται ότι

 

**Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f-1 ως προς την κυρτότητα. (μονάδες 3)

Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f-1, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f-1 στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα y΄y, και την ευθεία x=1 (μονάδες 6)

**Μονάδες 9**

**Δ3.** Για κάθε  θεωρούμε τα σημεία Α(x, f-1(x)), B(f-1(x), x) των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f-1 και f αντίστοιχα.

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε , το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f-1 και f στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, είναι ίσο με 1

(μονάδες 3)

1. Να βρείτε για ποια τιμή του  η απόσταση των σημείων Α, Β γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

(μονάδες 6)

**Μονάδες 9**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 263

**Α2.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 192

**Α3.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 303

**Α4. α)** Σωστό, **β)** Σωστό, **γ)** Λάθος, **δ)** Λάθος, **ε)** Σωστό

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** 

Οπότε ο γ.τ. των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο (0, 0) και .

Επειδή  τότε το σημείο  δεν ανήκει στον γ.τ..

**Β2.** Είναι 

Επειδή  τότε .

**Β3.** Για  έχουμε



Άρα w4+iw7=(-1)4+i(-i)7=i4-i8=1-1=0

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**

* 
* 

Είναι  αφού

 και 

Οπότε 

Άρα η f είναι συνεχής στο x=0

**Γ2.** Η f είναι παραγ. στο  με



* 
* 

x 0 e +

f΄(x) + -

f(x)

Έστω Α1=[0, e], f συνεχής και γν. αύξουσα στο Α1

Οπότε 

 συνεχής και γν. φθίνουσα στο Α2

Οπότε 

* 
*  οπότε 



Άρα 

**Γ3. i)** 

 (είναι ex, lnx συναρτήσεις 1-1)

**ii)** f(2)=f(4) αφού 24=42 και

f(4)=f(4) αφού 44=44

Άρα η εξίσωση f(x)=f(4) έχει ρίζες τις x=2, x=4

Η f είναι γν. αύξουσα στο Α1 οπότε x=2 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x)=f(4).

Η f είναι γν. φθίνουσα στο Α2 οπότε x=4 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x)=4.

Επομένως η εξίσωση  έχει ακριβώς δυο ρίζες τις x=2, x=4.

**Γ4.** Είναι 

Θεωρούμε 

Η h είναι συνεχής στο [2, 4] ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων

Η h είναι παραγωγίσιμη στο (2,4) με 







Οπότε h(2)=h(4)

Από Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα

 δηλαδή 

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Η f είναι παραγωγίσημη στο οπότε παραγωγίζοντας την δεδομένη σχέση έχουμε









 για κάθε 

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο  άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Θέτουμε f(x) =y και x=f-1(y) και η δεδομένη σχέση γίνεται

ey(y2-2y+3=f-1(y) οπότε

 (αφού f(A)=R)

**Δ2.** 



 και για κάθε  οπότε η f-1 είναι κυρτή στο R



Η εφαπτομένη της Cf-1 στο Α(0, 3) είναι

 άρα



Αφού η f-1 είναι κυρτή στο R τότε η εφαπτομένη της Cf-1 βρίσκεται κάτω από την Cf-1

Οπότε 

















τ.μ.

**Δ3. i)** Ισχύει  οπότε



Άρα 

**ii)** 



Έχουμε 

Οπότε  άρα d(x)

Οπότε  για x=0.

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ **«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ**

ΚΟΥΣΗΣ Π. – ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Ι. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Ε. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.